КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 514.144

Можей Наталья Павловна

ЛОКАЛЬНО ТРАНЗИТИВНЫЕ АФФИННЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ДЕЙСТВИЯ В МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЯХ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань 2000

Работа выполнена на кафедре высшей математики Белорусского государственного технологического университета

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор Комраков Б.П.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Соловьев Ю.П.; кандидат физико-математических наук, доцент Малахальцев М.А.

Ведущая организация — Ярославский государственный университет

Защита состоится 28 декабря 2000 года в 14.00 часов на заседании диссертационного Совета по математике К053.29.05 Казанского университета по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18, учебный корпус 2, аудитория 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке университета по адресу г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

Автореферат разослан 03 ноября 2000 года.

Ученый секретарь диссертационного Совета, кандидат физ.-мат. наук — В.В. Шурыгин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Язык и методы дифференциальной геометрии и, в частности, теории однородных пространств групп Ли и алгебр Ли, проникают во многие области, еще недавно очень далекие от приложений такого рода; они значительно изменили лицо современной математики и физики. Дифференциально-геометрические модели сейчас используются не только в различных разделах математики, но и начинают играть важную роль в классической и квантовой механике, квантовой теории поля и других областях теоретической физики.

Задача описания транзитивных действий, поставленная еще Софусом Ли, локально эквивалентна задаче классификации (с точностью до сопряженности) подалгебр алгебр Ли. Задача описания подмногообразий в аффинной (проективной) геометрии появляется еще в начале века в работах Бляшке и его школы. Решение этих задач важно сегодня как для самой теории, так и для приложений, но еще не были получены полные списки транзитивных действий, не были выписаны все однородные подмногообразия в малых размерностях, хотя именно эти размерности играют главную роль в приложениях.

В работе проводится классификация локально транзитивных аффинных и проективных действий, а также локально однородных подмногообразий в четырехмерной аффинной (проективной, эквиаффинной) геометрии и их алгебр симметрий.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Работа над диссертацией проводилась на кафедре математической физики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета в соответствии с темой "Исследование граничных задач для уравнений математической физики" (шифр 713/31), включенной на 1996–1998 гг. в план НИР, выполняемых кафедрой, а также на кафедре высшей математики инженерно-экономического факультета Белорусского государственного технологического университета в соответствии с темой ГБ 10-96 "Качественное исследование свойств дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений и решение некоторых задач управления и механики", разрабатываемой кафедрой в 1998–2000 годах и являющейся составной частью плана важнейших НИР АН РБ, раздел математической структуры 21.

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является описание аффинных и проективных действий в малых размерностях. Сюда включаются следующие задачи:

– классификация всех локально транзитивных подалгебр алгебры Ли трехмерного аффинного (проективного) пространства;

– выделение подалгебр, имеющих конечное число орбит, и описание всех конечных орбитальных разложений в трехмерной геометрии;

– классификация локально однородных подмногообразий в четырехмерной аффинной (проективной, эквиаффинной) геометрии, алгебры симметрий которых имеют размерность большую размерности подмногообразия, самих алгебр симметрий и операторов формы в эквиаффинной геометрии.

Методология и методы проведенного исследования. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят локальный характер. Особенностью методики, представленной в работе, является применение чисто алгебраических методов описания действий и соответствующих однородных пространств.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Все основные результаты диссертации новы. Научная новизна результатов обусловлена следующим. Впервые приведена полная классификация локально транзитивных аффинных и проективных действий на трехмерном пространстве. Впервые получена полная локальная классификация однородных подмногообразий в четырехмерной аффинной, проективной и эквиаффинной геометриях, алгебры симметрий которых имеют размерность, большую размерности подмногообразия, и найдены алгебры симметрий всех этих подмногообразий и операторы формы подмногообразий в эквиаффинной геометрии.

Практическая (экономическая, социальная) значимость полученных результатов. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут найти приложения в различных разделах дифференциальной геомерии, дифференциальных уравнений, топологии, в теории представлений и в теоретической физике. Работа содержит также алгоритмы классификации аффинных и проективных действий, однородных подмногообразий с их алгебрами симметрий и операторами формы. Экономическую значимость полученных в диссертации результатов оценить в настоящее время не представляется возможным.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

1. Проведена полная классификация локально транзитивных подалгебр алгебры Ли трехмерного аффинного пространства и выделены среди них классы проективно эквивалентных.

2. Проведена полная классификация локально транзитивных подалгебр алгебры Ли трехмерного проективного пространства, действие которых не сводится к аффинному.

3. Получены аффинные (проективные) подалгебры, имеющие конечное число орбит и выписаны все конечные орбитальные разложения в трехмерной аффинной геометрии.

4. Проведена полная классификация локально однородных подмногообразий в четырехмерной аффинной (проективной) геометрии, алгебры симметрий которых имеют размерность большую размерности подмногообразия.

5. Выделены все локально однородные подмногообразия в четырехмерной аффинной (проективной) геометрии с локально транзитивными алгебрами симметрий.

6. Найдены локально однородные гиперповерхности в четырехмерной эквиаффинной геометрии и их операторы формы.

Личный вклад соискателя. Все основные результаты диссертационной работы получены автором лично.

Апробация результатов исследования. Результаты, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на VII-й Белорусской математической конференции (16–21 октября 1996г., г. Минск), на Всероссийской молодежной научной конференции по матем. моделированию, геометрии и алгебре (1998г., г. Казань), на 63-й Научно-технической конференции БГТУ (1–8 февраля 1999г., г. Минск), на VIII-й Белорусской математической конференции (19–24 июня 2000г., г. Минск), а также на семинарах кафедры уравнений математической физики Белорусского государственного университета и кафедры высшей матетатики Белорусского государственного технологического университета.

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, из них 4 статьи и 5 тезисов докладов на конференциях. Общее количество страниц опубликованных материалов — 45.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, пяти глав, выводов и списка использованных источников из 122 наименований. Объем диссертационной работы составляет 106 страниц машинописного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается краткая оценка современного состояния области математики, рассматриваемой в диссертации, содержится обоснование актуальности выбранной темы исследования.

В первой главе приведен краткий обзор полученных до настоящего времени результатов. Описаны основные этапы развития аффинной и проективной дифференциальной геометрии.

Во второй главе решается задача классификации локально транзитивных аффинных и проективных действий на трехмерном пространстве, то есть задача классификации подгрупп групп аффинных и проективных преобразований, которые имеют открытые орбиты при действии на соответствующих пространствах.

Проводится полное локальное и глобальное описание связных подгрупп полной аффинной и проективной групп трехмерного пространства. Выделяются подгруппы, действующие локально транзитивно, и, в особенности, имеющие конечное число орбит, приводится классификация конечных орбитальных разложений. Основные результаты по аффинным и проективным действиям на трехмерном пространстве представлены автором в работах [1, 2, 5, 6, 8].

Описание локально транзитивных аффинных действий на $\mathbb{R}^3$ и проективных на $\mathbb{R}P^3$, т.е. описание связных локально транзитивных подгрупп групп Ли $\mathrm{Aff}(3,\mathbb{R}) = GL(3,\mathbb{R}) \leftthreetimes \mathbb{R}^3$ и $SL(4,\mathbb{R})$, сводится к описанию соответствующих подалгебр.

Множество всех подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством троек $(\mathfrak{a}, W, \omega)$, где $\mathfrak{a}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, W — подпространство в $V = \mathbb{R}^3$, инвариантное относительно $\mathfrak{a}$, и $\omega : \mathfrak{a} \to V/W$ — такое линейное отображение, что $\omega([x,y]) = x.\omega(y) - y.\omega(x)$ для всех $x, y \in \mathfrak{a}$. Элементы ω есть элементы $Z^1(\mathfrak{a}, V/W)$ — пространства 1-коциклов алгебры Ли $\mathfrak{a}$ с коэффициентами в V/W.

На множестве всех подалгебр действует группа $\mathrm{Aff}(3,\mathbb{R})$. Множество подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ с точностью до ее подгруппы находится во взаимно-однозначном соответствии со множеством троек $(\mathfrak{a}, W, \omega)$, где $\omega \in H^1(\mathfrak{a}, V/W)$.

Классифицируем подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ с точностью локального подобия следующим образом:

– опишем подпространства W пространства V с точностью до действия группы $GL(3,\mathbb{R})$;

– для каждого подпространства W опишем все подалгебры $\mathfrak{a}$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, сохраняющие W, с точностью до сопряженности относительно преобразований полной линейной группы, сохраняющих W;

– для каждой такой подалгебры $\mathfrak{a}$ опишем элементы пространства $\mathrm{H}^1(\mathfrak{a}, V/W)$ с точностью до естественного действия группы всех преобразований из полной линейной группы, сохраняющих W и $\mathfrak{a}$.

Поскольку нас интересуют не все, а только локально транзитивные подалгебры, то при классификации в каждом конкретном случае будем учитывать требование локальной транзитивности.

Получив классификацию локально транзитивных аффинных подалгебр, изучим их орбитальные разложения. Выберем из полученных орбитальных разложений те, которые имеют конечное число орбит и не переводятся друг в друга аффинными преобразованиями.

Пусть $\{O_1, \ldots, O_p\}$ — набор орбит. Обозначим через x, y, z координаты в $\mathbf{A}^3$. Каждую орбиту O_i на пространстве $\mathbf{A}^3$ будем описывать при помощи системы соотношений вида $(f_{i1}(x,y,z) = 0) \wedge \cdots \wedge (f_{il}(x,y,z) = 0) \wedge (f_{il+1}(x,y,z) > 0) \wedge \cdots \wedge (f_{ik}(x,y,z) > 0)$, где $l \leq k, f_{i1}, \ldots, f_{ik}$ — дифференцируемые функции. Точка m пространства $\mathbf{A}^3$ принадлежит орбите O_i тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют данной системе. Орбитальное разложение для данной алгебры (группы) Ли аффинных преобразований будем записывать в виде $(m \in O_1) \vee (m \in O_2) \vee \cdots \vee (m \in O_p)$.

Теорема 2.1. *Связная группа Ли аффинных преобразований, действующая на аффинном пространстве $\mathbf{A}^3$ с конечным числом орбит, имеет одно из следующих аффинно неизоморфных орбитальных разложений:*

1. $(x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \wedge (y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (z = 0 \vee z > 0 \vee z < 0)$
2. $(z = 0 \vee z > 0 \vee z < 0) \wedge (x = y = 0 \vee x^2 + y^2 \neq 0)$
3. $(x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \wedge y = z = 0 \vee (y > 0 \vee y < 0) \wedge z = 0 \vee (z > 0 \vee z < 0)$
4. $(x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \wedge y = z = 0 \vee (y > 0 \vee y < 0) \wedge z = 0 \vee (2zx = y^2 \vee 2zx < y^2 \vee 2zx > y^2) \wedge (z > 0 \vee z < 0)$
5. $(y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge z = 0 \wedge (x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \vee (y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (z > 0 \vee z < 0)$
6. $(y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \vee (z > 0 \vee z < 0)$
7. $y = z = 0 \wedge (x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \vee (y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (z > 0 \vee z < 0) \vee (y > 0 \vee y < 0) \wedge z = 0$
8. $(x = 0, z = y = 0) \vee (yz = x^2, y > 0, z > 0) \vee (yz = x^2, y < 0, z < 0) \vee (yz > x^2, y > 0, z > 0) \vee (yz > x^2, y < 0, z < 0) \vee (yz < x^2)$

9. $(x = y = z = 0) \vee (x^2 + y^2 + z^2 \neq 0)$
10. $(x = y = z = 0) \vee z > 0 \vee z < 0 \vee (z = 0, x^2 + y^2 \neq 0)$
11. $(x = y = z = 0) \vee (x > 0, y = z = 0) \vee (x < 0, y = z = 0) \vee (y^2 + z^2 \neq 0)$
12. $(x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \wedge z = 0 \vee (z > 0 \vee z < 0) \wedge (x = yz \vee x < yz \vee x > yz)$
13. $(y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (z = 0 \vee z > 0 \vee z < 0)$
14. $(x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \wedge z = 0 \vee (z > 0 \vee z < 0)$
15. $z = 0 \vee z > 0 \vee z < 0$
16. $(y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (x = z^2 \vee x > z^2 \vee x < z^2)$
17. $z = 0 \wedge (x = y^2 \vee x > y^2 \vee x < y^2) \vee (z > 0 \vee z < 0)$
18. $x = yz \vee x > yz \vee x < yz$
19. $x = y^2 + z^2 \vee x < y^2 + z^2 \vee x > y^2 + z^2$
20. $(x = y = 0) \vee (x^2 + y^2 \neq 0)$
21. $y = z^2 \vee y < z^2 \vee y > z^2$
22. $(x = yz - z^3/3) \vee (x < yz - z^3/3) \vee (x > yz - z^3/3)$
23. *Все пространство* $\mathbf{A}^3$ *— одна орбита.*

Если подалгебра в $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ имеет трехмерное инвариантное подпространство, то ей соответствует некоторая подалгебра $\mathfrak{aff}(3, \mathbb{R})$. Следовательно, чтобы классифицировать подалгебры в $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$, сохраняющие трехмерное инвариантное подпространство, достаточно выбрать из всех подалгебр, соответствующих аффинным, не сопряженные.

Если подалгебра в $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ не имеет трехмерных инвариантных подпространств, то она либо неразрешима, либо является вещественной формой подалгебры, имеющей инвариантные подпространства над $\mathbb{C}$.

Классифицируем неразрешимые подалгебры в $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$, не имеющие трехмерных инвариантных подпространств. Для каждой полупростой подалгебры $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ найдем все $\mathfrak{g}$, такие что $\mathfrak{a}$ является подалгеброй Леви алгебры $\mathfrak{g}$. Подалгебра $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ является $\mathfrak{a}$ — модулем (относительно присоединенного представления). Она разлагается в прямую сумму изотипных компонент. Если $\mathfrak{g}$ — неразрешимая подалгебра, то $\mathfrak{g}$ является прямой суммой своих пересечений с изотипными компонентами. Таким образом, чтобы найти $\mathfrak{g}$, находим в изотипных компонентах все подмодули $\mathfrak{a}$ – модулей, составляем их суммы и проверяем, когда в результате получается подалгебра.

Чтобы классифицировать разрешимые подалгебры в $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$, не имеющие трехмерных инвариантных подпространств, достаточно посмотреть, когда вещественная форма подалгебры, имеющей трехмерные инвариантные подпространства над полем $\mathbb{C}$, не имеет трехмерных инвариантных подпространств.

Это завершает классификацию проективных действий.

В третьей и четвертой главах работы рассматриваются однородные подмногообразия в четырехмерной аффинной и проективной геометриях. Однородные подмногообразия являются интересным и важным подклассом в классе всех подмногообразий в однородных пространствах, и задача их классификации активно обсуждалась в математической литературе начиная с конца прошлого века. Наиболее хорошо изучены однородные подмногообразия в аффинной и проективной геометриях размерности ≤ 3.

Однако при переходе к четырехмерным аффинной и проективной геометриям возникает ряд трудностей, связанных с резким увеличением объема вычислений и громоздкостью конечного результата. Так ограничимся описанием однородных поверхностей, алгебры симметрий которых имеют размерность, большую размерности подмногообразия, т.е., грубо говоря, наиболее симметричных поверхностей. В частности, в этот класс попадают все цилиндры и квадрики. Отметим, что такие однородные гиперповерхности в трехмерном случае исчерпываются цилиндрами, квадриками и

– поверхностью Кэли $z = xy + x^3/3$ в аффинной геометрии;

– поверхностью Кэли и поверхностью Энрикеса $(z - xy + x^3/3)^2 = 8/9(y - x^2/2)^3$ в проективной геометрии.

Локальная классификация однородных поверхностей, алгебры симметрий которых имеют размерность, большую размерности подмногообразия, получена автором в [3] (результаты можно найти и в [4, 9, 7]).

Рассматриваемая в этих главах задача тесно связана также с описанием аффинных и проективных действий, имеющих нетривиальную открытую орбиту, т.е. локально транзитивных, и, в частности, таких действий с конечным числом орбит. Действительно, в этом случае размерность группы преобразований не менее 4, и эта группа содержится в группе симметрий одной из орбит меньшей размерности, т.е. попадаем в рассматриваемый в работе класс подмногообразий.

Особенностью методики, представленной в работе, является использование чисто алгебраических методов описания однородных подмногообразий. Для решения проблемы используется алгебраический аналог метода Картана подвижных реперов.

Методика классификации подмногообразий.

Пусть M — однородное пространство, снабженное транзитивным действием группы Ли $\overline{G}$, и пусть L — вложенное подмногообразие в M. Будем предполагать, что действие $\overline{G}$ на M локально эффективно, и отождествлять алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ группы Ли $\overline{G}$ с некоторой подалгеброй алгебры Ли векторных полей на M.

Определение. *Алгеброй симметрий подмногообразия* L называется подалгебра $\mathrm{sym}(L)$ алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, определенная следующим соотношением: $\mathrm{sym}(L) = \{X \in \bar{\mathfrak{g}} \mid X_p \in T_pL$ для всех $p \in L\}$.

Пусть L — замкнутое локально однородное подмногообразие в M. Тогда группа симметрий $\mathrm{Sym}(L) = \{g \in \overline{G} \mid g.L = L\}$ является подгруппой группы $\overline{G}$, и $\mathrm{sym}(L)$ совпадает с соответствующей подалгеброй алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Более того, L является однородным тогда и только тогда, когда $\mathrm{Sym}(L)$ действует транзитивно на L.

Пусть $\mathfrak{h}$ — произвольная подалгебра в $\bar{\mathfrak{g}}$, и H — соответствующая связная виртуальная подгруппа группы $\overline{G}$. Тогда орбиты H могут быть рассмотрены как вложенные подмногообразия в M. Говорят, что L является орбитой $\mathfrak{h}$ через точку $a \in M$, если L — связное открытое подмногообразие (во внутренней топологии) орбиты H, примененной к точке a, и $a \in L$. Конечно, орбита $\mathfrak{h}$ через точку $a \in M$ определяется не однозначно, но любые две орбиты совпадают в некоторой окрестности точки a. Таким образом, чтобы найти соответствующее однородное подмногообразие L, нужно найти для $\mathfrak{h}$ связную виртуальную подгруппу H группы $\overline{G}$ и ее орбиту через фиксированную точку.

Пусть L — орбита $\mathfrak{h}$ через точку a. Определим подалгебру $\mathfrak{g} \subset \bar{\mathfrak{g}}$ и построим цепочку подалгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots$ следующим образом: $\mathfrak{g} = \{X \in \bar{\mathfrak{g}} \mid X_a = 0\}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{n+1} = \{x \in \mathfrak{g}_n \mid [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{g}_n + \mathfrak{h}\}$, $\mathfrak{g}_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{g}_n$. Тогда $\mathrm{sym}(L) = \mathfrak{g}_\infty + \mathfrak{h}$ и подалгебра $\mathrm{sym}(L)$ является наибольшей из подалгебр $\mathfrak{a}$ таких, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g} + \mathfrak{h}$.

Будем полагать, что две подалгебры алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ эквивалентны, если они могут быть преобразованы друг в друга с помощью элементов группы $\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Пусть $V_n = (\mathfrak{h} + \mathfrak{g}_n)/\mathfrak{g}_n \subset \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$, а $\pi_n : \bar{\mathfrak{g}} \to \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$ и $\tau_n : \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_{n+1} \to \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$ — естественные проекции при всех $n \geq 0$. Для данного подпространства $V_n \subset \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$ обозначим через G_{n+1} подгруппу в $\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, состоящую из всех автоморфизмов, которые сохраняют подалгебру $\mathfrak{g}_n$ и при индуцировании на $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_n$ сохраняют подпространство V_n.

Алгоритм описания всех алгебр симметрий однородных подмногообразий в M:

1. Опишем все подпространства V_0 в $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ (с точностью до преобразований, индуцированных элементами группы $\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$).

2. Для каждого подпространства V_n, найденного на предыдущем шаге, найдем подалгебру $\mathfrak{g}_{n+1}$, подгруппу G_{n+1}, и подпространство $W =$

$\tau_n^{-1}(V_n)$ в $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_{n+1}$. Если $\mathfrak{g}_{n+1} \neq \mathfrak{g}_n$, опишем (с точностью до G_{n+1}) все подпространства V_{n+1} в W, для которых V_{n+1} является дополнительным к $\ker \tau_n = \mathfrak{g}_n/\mathfrak{g}_{n+1}$ и для любых двух элементов $x + \mathfrak{g}_{n+1}, y + \mathfrak{g}_{n+1} \in V_{n+1}$ элемент $[x, y] + \mathfrak{g}_n$ принадлежит подпространству V_n. Затем повторяем этот шаг снова.

3. Если $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}_{n+1}$, найдем $\mathfrak{h} = \pi_n^{-1}(V_n)$ в $\bar{\mathfrak{g}}$. Если $\mathfrak{h}$ является подалгеброй, то $\mathfrak{h}$ является алгеброй симметрий некоторого однородного подмногообразия. Таким образом могут быть получены все алгебры симметрий.

Поверхности в проективной геометрии.

Применяя алгоритм к случаю $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(5, \mathbb{R})$, $\mathbf{M} = \mathbb{R}\mathrm{P}^4$, $\dim V_n = 3$ получим:

Теорема 3.1. *Всякое трехмерное локально однородное подмногообразие в* $\mathbb{R}\mathrm{P}^4$*, алгебра симметрий которого имеет размерность* ≥ 4*, либо является открытым подмножеством цилиндра или квадрики, либо эквивалентно открытому подмножеству одного из следующих подмногообразий:*

(1) $x_4 = x_1x_3^2 + x_2x_3$;
(2) $x_4 = x_1x_3^2 + x_2x_3 + x_3^4$;
(3) $x_4 = x_1^2x_3 + x_2x_3$;
(4) $x_4 = x_1^2 + x_2x_3 + x_3^3$;
(5) $x_4 = x_1^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3 + ax_3^4$;
(6) $x_2^2 + x_1x_3^2 + x_1x_4 = 0$, $x_1 > 0 \vee x_1 < 0$;
(7) $x_4(1 + x_1^2) = x_1(x_2^2 - x_3^2) + 2x_2x_3$;
(8) $x_1 + x_3x_4 \pm x_2^2 + x_4^a = 0$, $a \sim 2 - a, a \neq -1, 0, 1, 2, 3$;
(9) $x_1 + x_3x_4 \pm x_2^2 + (1 + x_4^2)e^{a \operatorname{arctg} x_4} = 0$, $a \sim -a, a \neq 0$;
(10) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 + x_4 \ln x_4 = 0$;
(11) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 + (1 + x_4^2) \operatorname{arctg} x_4 = 0$;
(12) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 \pm \ln x_4 = 0$;
(13) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 \pm e^{x_4} = 0$;
(14) $x_2^2 + x_1x_3 = x_4^a$, $a \sim 2 - a, a \neq 0, 1, 2$;
(15) $x_2^2 + x_1x_3 = (1 + x_4^2)e^{a \operatorname{arctg} x_4}$, $a \sim -a, a \neq 0$;
(16) $x_2^2 + x_1x_3 = e^{x_4}$;
(17) $x_2 + x_1x_3 + \ln x_4 = 0$;
(18) $x_2 + x_1x_3 + e^{x_4} = 0$;
(19) $x_2 + x_1x_3 + x_4 \ln x_4 = 0$;
(20) $x_2 + x_1x_3 + x_4^a = 0$, $a \neq 0, 1, 2$;
(21) $\pm(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = x_4^a$, $a \sim 2 - a, a \neq 0, 1, 2$;
(22) $\pm(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = (1 + x_4^2)e^{a \operatorname{arctg} x_4}$, $a \sim -a, a \neq 0$;

(23) $\pm(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = e^{x_4}$;

(24) $x_3x_4 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + x_4^a$, $a \neq 0, 1, 2$;

(25) $x_3x_4 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + x_4^2 \ln x_4$;

(26) $x_3 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + e^{x_4}$;

(27) $x_3 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + x_4 \ln x_4$.

Замечание 1. В случае (6) поверхность имеет две связные компоненты, определяемые условиями $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$, которые, как следует из доказательства, не являются проективно эквивалентными. В дальнейшем мы будем обозначать эти связные компоненты через $(6, +)$ и $(6, -)$ соответственно.

Замечание 2. Чтобы получить аналогичный результат над полем комплексных чисел, нужно исключить поверхности (7), (9), (11), (15) и (22), а также заменить все знаки '$\pm$' просто на '$+$' (или на '$-$').

Классифицируем двумерные однородные подмногообразия, применяя алгоритм к случаю $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(5, \mathbb{R})$, $\dim V_n = 2$:

Теорема 3.2. *Всякое двумерное локально однородное подмногообразие в $\mathbb{R}P^4$, алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 3, либо является открытым подмножеством цилиндра или подмногообразия в $\mathbb{R}P^3$, либо эквивалентно открытому подмножеству одного из следующих подмногообразий:*

(1) $x_3 = x_1^2, x_4 = x_2^2$;

(2) $x_3 = x_1^2, x_4 = x_1x_2$;

(3) $x_3 = x_1^2, x_4 = x_1x_2 + x_1^4$;

(4) $x_3 = x_1^2 - x_2^2, x_4 = x_1x_2$;

(5) $x_3 = x_1^2, x_4 = x_1^3 + x_2^2$;

(6) $x_3 = x_1x_2 + x_1^3/3, x_4 = x_2^2 - x_1^4/6$;

(7) $x_1x_3 = 1, x_2 + x_1x_4 = x_1^a$, $a \sim 1 - a, a \neq 1, 2, 3$;

(8) $x_1x_3 = 1, x_2 + x_1x_4 = x_1 \ln x_1$;

(9) $x_1x_3 = 1, x_2 + x_1x_4 = x_1^2 \ln x_1$;

(10) $x_1^2 = x_3 - x_3^2, x_3 = (x_1x_4 + x_2x_3)^2 e^{a \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}}$, $a \sim -a$;

(11) $x_2 = x_1^2, x_4 + x_1x_3 = e^{x_1}$;

(12) $x_2 = x_1^2, x_4 = x_3^a$, $a \neq 1/2, 1, |a| \leq 1$;

(13) $x_2 = x_1^2, x_4 = e^{x_3}$;

(14) $x_2 = x_1^2, x_4 = x_3 \ln x_3$;

(15) $x_2 = x_1^2, \ln(x_3^2 + x_4^2) = a \operatorname{arctg} \frac{x_3}{x_4}$ $a \sim -a$;

(16) $x_2 = x_1x_3, x_4 = x_1^a$, $a \sim 1 - a, a \neq 2$;

(17) $x_2 = x_1x_3, x_4 = \ln x_1$;

(18) $x_2 = x_1x_3, x_4 = e^{x_1}$;

(19) $x_1x_4 = x_2x_3, \ln(x_1^2 + x_2^2) = a \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}$, $a \sim -a$

или одного из подмногообразий, заданных параметрически:

(20) $(g_{12}z + g_{22})^3(g_{11}z + g_{21})$;
(21) $(g_{12}z + g_{22})^2(g_{11}z + g_{21})^2$,

где параметры $g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}$ удовлетворяют условию $g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12} = 1$, а проективными координатами точки на многообразии являются коэффициенты при степенях многочлена.

Замечание. Чтобы получить аналогичный результат над полем комплексных чисел, нужно исключить поверхности (10), (15) и (19), а также заменить все знаки '$\pm$' просто на '$+$' (или на '$-$').

Классифицируем одномерные однородные подмногообразия, применяя алгоритм к случаю $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(5, \mathbb{R})$, $\dim V_n = 1$:

Теорема 3.3. *Всякое одномерное локально однородное подмногообразие в $\mathbb{R}P^4$, алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 2, либо является открытым подмножеством кривой в $\mathbb{R}P^3$, либо эквивалентно открытому подмножеству кривой $x_2 = x_1^2, x_3 = x_1^3, x_4 = x_1^4$.*

Поверхности в аффинной геометрии.

Классифицируем теперь трехмерные однородные подмногообразия в четырехмерном аффинном пространстве, применяя алгоритм к случаю $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{aff}(4, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$, $M = \mathbb{R}^4$ и $\dim V_n = 3$:

Теорема 4.1. *Всякое трехмерное локально однородное подмногообразие в $\mathbb{R}^4$, алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 4, либо является открытым подмножеством цилиндра или квадрики, либо эквивалентно открытому подмножеству одного из следующих подмногообразий:*

(1) $x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_4x_1^2 = 0$;
(2) $x_4 = x_1x_3^2 + x_2x_3$;
(3) $x_4 = x_1x_3^2 + x_2x_3 + x_3^4$;
(4) $x_4 = x_1^2x_3 + x_2x_3$;
(5) $x_4x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2 = 0$;
(6) $x_4 = x_1^2 + x_2x_3 + x_3^3$;
(7) $x_4 = x_1^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3 + ax_3^4$;
(8) $x_2^2 + x_1x_3^2 + x_1x_4 = 0$, $x_1 > 0 \vee x_1 < 0$;
(9) $x_1 + x_3x_4 \pm x_2^2 + x_4^a = 0$, $a \neq 0, 1, 2, 3$;
(10) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 \pm x_4 \ln x_4 = 0$;
(11) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 \pm \ln x_4 = 0$;
(12) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 \pm x_4^2 \ln x_4 = 0$;
(13) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 \pm e^{x_4} = 0$;

(14) $x_2^2 + x_1x_3 = x_4^a$, $a \neq 0, 1, 2$;
(15) $x_2^2 + x_1x_3 = e^{x_4}$;
(16) $x_2x_4 + x_1x_3 + x_4^2 \ln x_4 = 0$;
(17) $x_2 + x_1x_3 + \ln x_4 = 0$;
(18) $x_2 + x_1x_3 + e^{x_4} = 0$;
(19) $x_2x_4 + x_1x_3 + x_4 \ln x_4 = 0$;
(20) $x_2 + x_1x_3 + x_4 \ln x_4 = 0$;
(21) $x_2 + x_1x_3 + x_4^a = 0$, $a \neq 0, 1, 2$;
(22) $x_2x_4 + x_1x_3 + x_4^a = 0$, $a \neq 0, 1, 2$;
(23) $\pm(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = x_4^a$, $a \neq 0, 1, 2$;
(24) $\pm(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = e^{x_4}$;
(25) $x_3x_4 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + x_4^a$, $a \neq 0, 1, 2$;
(26) $x_3 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + x_4^a$, $a \neq 0, 1, 2$;
(27) $x_3x_4 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + x_4^2 \ln x_4$;
(28) $x_3 = \pm(x_1^2 + x_2^2) - \ln x_4$;
(29) $x_3 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + e^{x_4}$;
(30) $x_3x_4 = \pm(x_1^2 + x_2^2) - x_4 \ln x_4$;
(31) $x_3 = \pm(x_1^2 + x_2^2) + x_4 \ln x_4$;
(32) $(x_1x_3^2 - x_4x_2x_3 + x_4^3/3)^2 = -8/9(x_3x_2 - x_4^2/2)^3$;
(33) $x_1x_2x_3 + x_1^2x_4 + x_2^3 = 0$.

Замечание 3. В случае (8) поверхность имеет две связные компоненты, определяемые условиями $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$, которые не являются аффинно эквивалентными.

Замечание 4. Чтобы получить результат над полем комплексных чисел, нужно заменить все знаки '$\pm$' просто на '$+$' (или на '$-$').

Классифицируем двумерные однородные подмногообразия, применяя алгоритм к случаю $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{aff}(4, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ и $\dim V_n = 2$:

Теорема 4.2. *Всякое двумерное локально однородное подмногообразие в $\mathbb{R}^4$, алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 3, либо является открытым подмножеством цилиндра или подмногообразия в $\mathbb{R}^3$, либо эквивалентно открытому подмножеству одного из следующих подмногообразий:*

(1) $x_3 = x_1^2, x_4 = x_2^2$;
(2) $x_3 = x_1^2, x_4 = x_1x_2$,
(3) $x_3x_1 = 1, x_2 = x_1x_4$;
(4) $x_1^2 = x_3 - x_3^2, x_1x_4 = x_2x_3$;
(5) $x_3 = x_1^2, x_4 = x_1x_2 + x_1^4$;
(6) $x_3 = x_1^2 - x_2^2, x_4 = x_1x_2$;

(7) $x_1^3 = x_4x_2^2, x_3^3 = x_2x_4^2$;
(8) $x_3 = x_1^2, x_4 = x_1^3 + x_2^2$;
(9) $x_3 = x_1x_2 + x_1^3/3, x_4 = x_2^2 - x_1^4/6$;
(10) $x_3 = x_1x_2, x_4 = x_1^2x_2$;
(11) $x_2 = x_1^2, x_4 + x_1x_3 = e^{x_1}$;
(12) $x_2 = x_1^2, x_4 + x_1x_3 = x_1 \ln x_1$;
(13) $x_2 = x_1^2, x_4 + x_1x_3 = \ln x_1$;
(14) $x_2 = x_1^2, x_4 + x_1x_3 = x_1^2 \ln x_1$;
(15) $x_2 = x_1^2, x_4 + x_1x_3 = x_1^3 \ln x_1$;
(16) $x_2 = x_1^2, x_4 + x_1x_3 = x_1^a, a \neq 0, 1, 2, 3, 4$;
(17) $x_2 = x_1^2, x_4 = x_3 \ln x_3$;
(18) $x_2 = x_1^2, \ln(x_3^2 + x_4^2) = a \operatorname{arctg} \frac{x_3}{x_4}\ a \sim -a$;
(19) $x_2 = x_1^2, x_4 = x_3^a, a \neq 1/2, 1, |a| \leq 1$;
(20) $x_2 = x_1^2, x_4 = e^{x_3}$;
(21) $x_1x_3 = 1, x_2 + x_1x_4 = x_1^a, a \sim 1 - a, a \neq 1, 2$;
(22) $x_1^2 = x_3 - x_2^2, x_3 = (x_1x_4 + x_2x_3)^2 e^{a \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}}, a \sim -a$;
(23) $x_1x_3 = 1, x_2 + x_1x_4 = x_1 \ln x_1$;
(24) $x_1x_3 = 1, x_2 + x_1x_4 = x_1^2 \ln x_1$;
(25) $x_2 = x_1x_3, x_4 = e^{x_1}$;
(26) $x_2 = x_3e^{x_1}, x_4 = e^{x_1}$;
(27) $x_2 = x_3 \ln x_1, x_4 = x_1 \ln x_1$;
(28) $x_2 = x_1x_3, x_4 = x_1 \ln x_1$;
(29) $x_2 = x_1x_3, x_4 = x_1^a, a \neq -1, 0, 1, 2$;
(30) $x_1x_4 = x_2x_3, \ln(x_1^2 + x_2^2) = a \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}, a \sim -a$;
(31) $x_2 = x_1^{a-1}x_3, x_4 = x_1^a, a \sim 1/a, a \neq 0, 1, 2$.

Замечание. Чтобы получить аналогичный результат над полем комплексных чисел, нужно исключить поверхности (4), (18), (22) и (30), а также заменить все знаки '$\pm$' просто на '$+$' (или на '$-$').

Классифицируем одномерные однородные подмногообразия, применяя алгоритм к случаю $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{aff}(4, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ и $\dim V_n = 1$:

Теорема 4.3. *Всякое одномерное локально однородное подмногообразие в $\mathbb{R}^4$, алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 2, либо является открытым подмножеством кривой в $\mathbb{R}^3$, либо эквивалентно открытому подмножеству кривой $x_2 = x_1^2, x_3 = x_1^3, x_4 = x_1^4$.*

Классифицируем теперь трехмерные однородные гиперповерхности в четырехмерном эквиаффинном пространстве, применяя классификационный к случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}) \leftthreetimes \mathbb{R}^4$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$, $\dim V_n = 3$:

Теорема 4.4. *Всякое трехмерное локально однородное подмногообразие в четырехмерной эквиаффинной геометрии, алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 4, либо является открытым подмножеством цилиндра или квадрики, либо эквивалентно открытому подмножеству подмногообразия одного из следующих типов:*

(1) $x_4 = x_1x_3^2 + x_2x_3$;
(2) $x_4 = x_1^2 + x_2x_3 + x_3^3$;
(3) $x_1 + x_3x_4 + x_2^2 + a\ln x_4 = 0$, $a \neq 0$;
(4) $(x_2^2 + x_1x_3)^3x_4^2 = a^2$, $a \neq 0$;
(5) $(x_2 + x_1x_3)^2x_4 = a$, $a \neq 0$;
(6) $(\pm(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2)^3x_4^2 = a^2$, $a \neq 0$;
(7) $(x_3 \pm (x_1^2 + x_2^2))^2x_4 = a$, $a \neq 0$.

Сопоставление результатов классификаций. Сравним полученные классификации для аффинной и проективной геометрий. Группа аффинных преобразований конечномерного пространства естественным образом вкладывается в группу преобразований проективизации данного пространства. Следовательно, всякое аффинно однородное подмногообразие является проективно однородным, но некоторые аффинно неэквивалентные подмногообразия являются проективно эквивалентными. В теореме 4.1 проективно эквивалентными являются следующие пары подмногообразий (1) и (2), (4) и (5), (6) и $(9, a = -1)$, $(9, a)$ и $(9, 2-a)$, $(10, +)$ и $(10, -)$, (11) и (12), $(14, a)$ и $(14, 2-a)$, (16) и (17), (19) и (20), (21) и (22), $(23, a)$ и $(23, 2-a)$, (25) и (26), (27) и (28), (30) и (31). Подмногообразиям (32) и (33) соответствуют проективные цилиндры. С другой стороны, поверхности (7), (9), (11), (15) и (22) из теоремы 3.1, которые отсутствуют в теореме 4.1, не являются аффинно однородными.

Аналогично, в теореме 4.2 проективно эквивалентными являются следующие группы подмногообразий (2), (3), (4) и (10); (12), (14) и (23); $(16, a)$, $(16, 1-a)$ и $(21, a \neq 3)$; (5) и $(21, a = 3)$; (13), (15) и (24); $(29, a)$, $(29, 1-a)$ и (31); (28) и (26); (25) и (27). Подмногообразию (7) соответствует проективный цилиндр. С другой стороны, поверхности (20) и (21) из теоремы 3.2, которые отсутствуют в теореме 4.2, не являются аффинно однородными.

Действия с открытой орбитой. Выделим из найденных аффинных и проективных действий те, которые имеют открытую орбиту и, в частности, имеют конечное число орбит. У приведенных выше подмногообразий в случаях (1)–(7) теоремы 3.1 и случаях (1)–(8) теоремы 4.1, а также в случаях (1)–(4) теоремы 3.2 и случаях (1)–(6) теоремы 4.2

алгебры симметрий действуют с конечным числом орбит. Кроме этого, алгебры симметрий квадрик имеют конечное число орбит. Далее, алгебра симметрий цилиндра имеет конечное число орбит тогда и только тогда, когда алгебра симметрий основания этого цилиндра имеет конечное число орбит (основание является поверхностью в пространстве меньшей размерности).

Для описания поверхностей в трехмерном эквиаффинном пространстве используются формулы Гаусса и Вейнгартена. В формуле Гаусса ковариантная производная $D_X Y$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, где X, Y — векторные поля на гиперповерхности M^n, раскладывается в форме $D_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)\xi$, здесь $\nabla_X Y$ — касательная компонента, h — аффинная фундаментальная форма, а ξ — произвольное трансверсальное векторное поле. Для невырожденной гиперповерхности существует единст енное (с точностью до знака) трансверсальное векторное поле такое, что векторное поле $D_X\xi$ в любой точке лежит в касательном пространстве к подмногообразию. Тогда аффинный оператор формы S определяется из соотношения (формула Вейнгартена): $D_X\xi = -SX$. Полученная эквиаффинная структура называется структурой Бляшки. Поскольку в работе исследуются только однородные подмногообразия, можно рассмотреть эти формулы в фиксированной точке. Тогда, в силу однородности, все векторные поля, аффинная фундаментальная форма и оператор формы полностью определяются своими значениями в этой точке. В пятой главе основные понятия дифференциальной геометрии переписаны для геометрии в точке, то есть на языке алгебр Ли, и классифицированы операторы формы однородных гиперповерхностей в четырехмерной эквиаффинной геометрии (аффинные фундаментальные формы всех однородных поверхностей в четырехмерной аффинной геометрии были найдены в четвертой главе в процессе классификации).

Теорема 5.1. *У найденных выше (см. теорему 4.4) однородных подмногообра ий следующие операторы формы:*

(1) – вырожденная аффинная фундаментальная форма;
(2) – оператор формы тождественно равен нулю;
(3) – оператор формы тождественно равен нулю;
(4) – оператор формы имеет вид cE;
(5) – диагональный с одним ненулевым собственным значением;
(6) – оператор формы имеет вид cE;
(7) – диагональный с одним ненулевым собственным значением.

ВЫВОДЫ

1. Проведена полная классификация локально транзитивных подалгебр алгебры Ли трехмерного аффинного пространства и выделены среди них классы проективно эквивалентных,

2. Проведена полная классификация локально транзитивных подалгебр алгебры Ли трехмерного проективного пространства, действие которых не сводится к аффинному.

3. Получены аффинные (проективные) подалгебры, имеющие конечное число орбит и описаны все конечные орбитальные разложения в трехмерной аффинной геометрии.

4. Проведена полная классификация локально однородных подмногообразий в четырехмерной аффинной (проективной) геометрии, алгебры симметрий которых имеют размерность, большую размерности подмногообразия.

5. Получено описание всех локально однородных подмногообразий в четырехмерной аффинной (проективной) геометрии с локально транзитивными алгебрами симметрий.

6. Найдены локально однородные гиперповерхности в четырехмерной эквиаффинной геометрии и их операторы формы.

Результаты этапов 1–3 отражены в работах [1, 2, 5, 6, 8], а результаты этапов 4–6 — в работах [3, 4, 7, 9].

Библиография

[1] Можей Н.П. Локально транзитивные аффинные действия в малых размерностях // Доклады НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук.- 1999.- Т. 43.- N 2.- С. 7-9.

[2] Можей Н.П. Локально транзитивные аффинные и проективные действия в малых размерностях // Труды БГТУ. Серия IV. Физ.-мат. науки и информатика.- 1999.- Вып. 7.- С. 13-17.

[3] Можей Н.П. Однородные подмногообразия в четырехмерной аффинной и проективной геометрии // Известия вузов.- 2000.- N 7 (458).- С. 1-13.

[4] Можей Н.П. Однородные подмногообразия в четырехмерной аффинной и проективной геометрии // Труды БГТУ. Серия IV. Физ.-мат. науки и информатика.- 2000.- Вып. 8.- С. 12-22.

[5] Можей Н.П. Локально транзитивные аффинные и проективные действия в малых размерностях // VII Белорусская математическая конференция: Тез. докл. конф. Ч. 1.- Минск, 1996.- С. 163-165.

[6] Можей Н.П. Локально транзитивные аффинные действия в малых размерностях // Всероссийская молодежная научная конференция по матем. моделированию, геометрии и алгебре: Тез. докл. конф.- Казань, 1998.- С. 230-234.

[7] Mozhei N. Homogeneous submanifolds in four-dimensional affine and projective geometries // Workshop "Towards 100 years after S. Lie", Kasan, Sept. 7-17, 1998.- Kasan: ISLC, 1998.- P. 28-32.

[8] Mozhei N. Low-dimensional locally transitive affine actions // Workshop "Towards 100 years after S. Lie", Kasan, Sept. 7-17, 1998.- Kasan: ISLC, 1998.- P. 26-28.

[9] Можей Н.П. Однородные подмногообразия в четырехмерной аффинной и проективной геометрии // VIII Белорусская математическая конференция: Тез. докл. конф. Ч. 1.- Минск, 2000.- С. 153-154.

РЕЗЮМЕ

Можей Наталья Павловна

Локально транзитивные аффинные и проективные действия в малых размерностях

Ключевые слова: транзитивное действие, алгебра симметрий, однородное подмногообразие, алгебра Ли, аффинное действие, проективное действие, аффинная связность, аффинное вложение, оператор формы.

Целью диссертации является изучение локально транзитивных аффинных и проективных действий в малых размерностях и локально однородных подмногообразий в аффинной (проективной, эквиаффинной) геометрии, их алгебр симметрий, а также операторов формы в эквиаффинной геометрии.

В диссертации использован алгебраический подход к описанию однородных подмногообразий, аппарат теории групп, алгебр Ли и однородных пространств.

Основные результаты диссертации:

- проведена полная классификация локально транзитивных подалгебр алгебры Ли трехмерного аффинного и проективного пространств;
- получены аффинные (проективные) подалгебры, имеющие конечное число орбит, и их конечные орбитальные разложения;
- проведена полная классификация локально однородных подмногообразий со стабилизатором в четырехмерной аффинной (проективной) геометрии;
- выделены все локально однородные подмногообразия в четырехмерной аффинной (проективной) геометрии с локально транзитивными алгебрами симметрий;
- найдены локально однородные гиперповерхности в четырехмерной эквиаффинной геометрии и их операторы формы.

Результаты работы могут найти применение в различных разделах дифференциальной геомерии, дифференциальных уравнений, топологии, в теории представлений и в теоретической физике. Работа содержит также алгоритмы классификации аффинных и проективных действий, однородных подмногообразий, их алгебр симметрий и операторов формы.

SUMMARY

Mozhei Natalya Pavlovna

Low-dimensional locally transitive affine and projective actions

Key words: transitive action, symmetry algebra, homogeneous submanifold, Lie algebra, affine action, projective action, affine connection, affine immersion, shape operator.

This thesis is devoted to the study of locally transitive affine and projective actions in low dimensions, description of locally homogeneous submanifolds in affine, projective and equiaffine geometries, and their symmetry algebras and shape operators in equiaffine geometry.

In this work we use the algebraic approach for description of homogeneous submanifolds, methods of the theory of Lie groups, Lie algebras and homogeneous spaces.

Main results of the thesis are:

- the complete classification of locally transitive subalgebras in the Lie algebra of three-dimensional affine and projective spaces;
- the complete description of affine (projective) subalgebras that have finitely many orbits, and their decompositions into orbits;
- the local classification of homogeneous submanifolds with stabilizer in four-dimensional affine and projective geometries;
- the complete classification of locally homogeneous submanifolds in four-dimensional affine and projective geometries whose symmetry algebras act locally transitively on four-dimensional space;
- the complete description of locally homogeneous hypersurfases in four-dimensional equiaffine geometry and their shape operators.

The results of the thesis can be used in differential geometry, theory of differential equations, topology, in the representation theory and theoretical physics. The work contains algorithms of classification of affine and projective actions, homogeneous submanifolds, their symmetry algebras and shape operators.

МОЖЕЙ Наталья Павловна

ЛОКАЛЬНО ТРАНЗИТИВНЫЕ АФФИННЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ДЕЙСТВИЯ В МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЯХ

Подписано в печать 31.10.2000. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,3. Усл. кр.-отт. 1,3. Уч.-изд. л. 1,1.
Тираж 80 экз. Заказ 438.
Белорусский государственный технологический университет.
Лицензия ЛВ N 276 от 15.04.98. 220050, Минск, Свердлова, 13а.
Отпечатано на ротапринте Белорусского государственного технологического университета. 220050, Минск, Свердлова, 13а.

200